

# Přijímací zkouška na MFF UK v Praze

## pro bakalářské studijní programy fyzika, informatika a matematika

### 2019, varianta A

U každé z deseti úloh je nabízeno pět odpovědí: a, b, c, d, e. Vaším úkolem je u každé úlohy a každé odpovědi rozhodnout a označit, zda je správná či chybná, případně zda uvedené tvrzení platí či neplatí apod. Čas na vypracování testu je **75 minut**.

**Bodování.** Za každou úlohu je možno získat 0 až 10 bodů. Za každou dobře označenou<sup>1</sup> odpověď získáte +2 body, za každou špatně označenou odpověď –2 body, za otázku bez odpovědi 0 bodů. Pokud podle těchto pravidel nasbíráte za úlohu záporný počet bodů, budete za ni hodnoceni 0 body.

**Způsob označování a korekce.** Zvolená odpověď se označuje úplným vyplněním příslušného kolečka. Pokud jste odpověď již označili a chcete se opravit, můžete svou volbu zrušit velkým křížkem přes vyplněné kolečko a vyplnit kolečko jiné. Zvolit již škrtnuté kolečko však nelze. Jinak označené odpovědi jsou považovány za neoznačené. V následujícím příkladu si všimněte, že poslední dva sloupčky mají stejnou hodnotu, rozdíl je pouze v korekcích.

**Příklad.** Jako příklad uvádíme počty bodů, které získáte pro různé zaškrtnutí odpovědí v úloze „Výsledek úlohy  $1 + 1$  je“:

		Odpovědi			Odpovědi			Odpovědi			Odpovědi		
		Ano	Ne		Ano	Ne		Ano	Ne		Ano	Ne	
(a)	2	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	(+2)	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	(+2)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	(0)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	(0)
(b)	3	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(+2)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	(0)	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(+2)	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(+2)
(c)	Méně než 12	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	(+2)	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(-2)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	(0)	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	(0)
(d)	Kladné číslo	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	(+2)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	(0)	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(-2)	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(-2)
(e)	1	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(+2)	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	(-2)	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(+2)	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(+2)
<b>Bodů:</b>		<b>10</b>			<b>0</b>			<b>2</b>			<b>2</b>		

<sup>1</sup>Za dobře označenou odpověď se považuje taková, kde správná odpověď je „Ano“ a vy označíte pouze „Ano“, nebo správná odpověď je „Ne“ a vy označíte pouze „Ne“. Za špatnou odpověď se považuje taková, kde správná odpověď je „Ano“ a vy označíte pouze „Ne“, nebo správná odpověď je „Ne“ a vy označíte pouze „Ano“. Všechny ostatní možnosti se pokládají za otázku bez odpovědi.

V následujících úlohách určete, která tvrzení platí a která neplatí (Ano = platí, Ne = neplatí).

1. Uvažujme funkci  $f(x) = e^{-x} - e^x$ . Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

- (a) Funkce  $f$  je sudá.
- (b) Funkce  $f$  je lichá.
- (c) Funkce  $f$  je periodická.
- (d) Funkce  $f$  je rostoucí.
- (e) Funkce  $f$  je prostá.

2. V rovnoramenném trojúhelníku  $ABC$  znáte stranu  $a = |BC| = 8$  cm a úhel  $\alpha = \sphericalangle CAB = 120^\circ$ . Rozhodněte, zda platí:

- (a) Strana  $b = \frac{8}{\sqrt{3}}$  cm
- (b) Výška  $v_a = 2\sqrt{3}$  cm
- (c) Výška  $v_c = 4$  cm
- (d) Plocha trojúhelníku je větší než  $8$  cm<sup>2</sup>.
- (e) Střed kružnice opsané leží vně trojúhelníku.

3. Necht'  $M_a$  je množina všech řešení rovnice

$$x^2 + a|x| + 1 = 0$$

kde  $a$  je reálné číslo, v oboru reálných čísel. Rozhodněte, zda platí:

- (a) Existuje  $a$  reálné tak, že  $M_a$  je prázdná.
- (b) Existuje  $a$  reálné tak, že  $M_a$  je jednoprvková.
- (c) Existuje  $a$  reálné tak, že  $M_a$  je dvouprvková.
- (d) Existuje  $a$  reálné tak, že  $M_a$  je tříprvková.
- (e) Existuje  $a$  reálné tak, že  $M_a$  má více než tři prvky.

4. Rozhodněte, pro které množiny  $A$  a  $B$  je následující věta pravdivá: Pro každý prvek  $a$  z množiny  $A$  a každý prvek  $b$  z množiny  $B$  platí, že pokud  $a < b$ , existuje  $c$  z množiny  $B$ , který splňuje  $a < c < b$ .

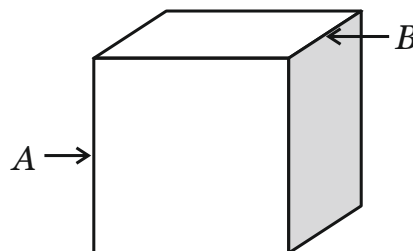
- (a)  $A = (-1, 0)$ ,  $B = (0, 1)$
- (b)  $A = [-1, 0]$ ,  $B = [0, 1]$
- (c)  $A = (0, 1)$ ,  $B = (-1, 0)$
- (d)  $A = (0, 1)$ ,  $B = [0, 1]$
- (e)  $A = [0, 1]$ ,  $B = [0, 1]$

5. Do rovnostranného trojúhelníku  $ABC$  je vepsán čtverec  $DEFG$  o straně  $d$  tak, že strana  $DE$  splývá se stranou  $c$  trojúhelníku a vrcholy  $F$  a  $G$  leží na stranách  $a$  a  $b$ . Rozhodněte, zda platí:

- (a) Délka strany trojúhelníku  $ABC$  je  $(\sqrt{3} + 1)d$ .
- (b) Délka úsečky  $AG$  je  $\frac{2}{\sqrt{3}}d$ .
- (c) Trojúhelník  $ABC$  má výšku  $(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1)d$ .
- (d) Obsah trojúhelníku  $ABC$  je  $(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2})d^2$ .
- (e) Obsah trojúhelníku  $CGF$  je  $\frac{\sqrt{3}}{4}d^2$ .

6. Hrana krychle má délku 10 cm, body  $A$ ,  $B$  jsou středy hran této krychle, jak je znázorněno na obrázku. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení o délce úsečky  $AB$ :

- (a)  $|AB| = 5\sqrt{3}$  cm
- (b)  $|AB| = 5\sqrt{5}$  cm
- (c)  $|AB| = 5\sqrt{6}$  cm
- (d)  $|AB| = 10\sqrt{3}$  cm
- (e)  $|AB| > 12$  cm



7. Spirála se skládá ze čtvrtkružnic. Poloměr první čtvrtkružnice je 100 cm. Poloměr každé další čtvrtkružnice je o 10 % menší než poloměr čtvrtkružnice předcházející. Rozhodněte, zda platí:

- (a) Poloměr 3. čtvrtkružnice je 80 cm.
- (b) Součet délky 2. a 4. čtvrtkružnice je větší než 240 cm.
- (c) Podíl délky 2. a 5. čtvrtkružnice je 1,5.
- (d) Rozdíl délky 1. a 3. čtvrtkružnice je větší než 27 cm.
- (e) Celková délka spirály je  $500\pi$  cm.

8. Házíme černou, bílou a zelenou kostkou. Označme následující náhodné jevy:

- A: na černé kostce padne vyšší číslo než na bílé kostce
- B: na alespoň dvou (libovolných) kostkách padne stejné číslo
- C: součet čísel na černé a bílé kostce bude sudý

Která tvrzení o pravděpodobnosti těchto jevů platí?

- (a)  $P(A) < P(B)$
- (b)  $P(A) < P(C)$
- (c)  $P(C) < P(B)$
- (d) Pravděpodobnost právě jednoho z těchto jevů je větší než  $1/2$ .
- (e) Pravděpodobnost každého z těchto jevů je nejvýše  $1/2$ .

9.  $N = 21609 = 3^2 \cdot 7^4$ . Která tvrzení jsou pravdivá? (Dělitelem čísla  $n$  rozumíme přirozené číslo, které dělí  $n$  beze zbytku. Číslo 1 a  $n$  jsou též děliteli.)

- (a) Počet dělitelů  $N$  je sudý.
- (b)  $N$  má více než deset dělitelů.
- (c) Číslo 120 má více dělitelů než  $N$ .
- (d) Nejmenší přirozené číslo, které má stejný počet dělitelů jako  $N$ , je menší než 120.
- (e) Přirozených čísel, která jsou menší než  $N$  a mají stejný počet dělitelů jako  $N$ , je nejvýše deset.

10. Necht'  $M$  je množina všech řešení rovnice

$$2 \sin \sqrt{x^2} - (\cos x)^2 + 2 = 0$$

v oboru reálných čísel. Rozhodněte, zda platí:

- (a) Pokud  $x \in M$ , pak  $-x \in M$ .
- (b) Pokud  $x \in M$ , pak  $(x + \pi) \in M$ .
- (c) Pokud  $x \in M$ , pak  $(x + 2\pi) \in M$ .
- (d) Pokud  $x \in M$ , pak  $2x \in M$ .
- (e) Pokud  $x \in M$ , pak  $5x \in M$ .

## **Řešení úloh**

1. Správné odpovědi: NANNA
2. Správné odpovědi: ANAAA
3. Správné odpovědi: ANANA
4. Správné odpovědi: ANAAA
5. Správné odpovědi: NAANA
6. Správné odpovědi: NNANA
7. Správné odpovědi: NANAA
8. Správné odpovědi: AANNA
9. Správné odpovědi: NAANN
10. Správné odpovědi: ANNNA

# Přijímací zkouška na MFF UK v Praze

## pro bakalářské studijní programy fyzika, informatika a matematika

### 2019, varianta B

U každé z deseti úloh je nabízeno pět odpovědí: a, b, c, d, e. Vaším úkolem je u každé úlohy a každé odpovědi rozhodnout a označit, zda je správná či chybná, případně zda uvedené tvrzení platí či neplatí apod. Čas na vypracování testu je **75 minut**.

**Bodování.** Za každou úlohu je možno získat 0 až 10 bodů. Za každou dobře označenou<sup>1</sup> odpověď získáte +2 body, za každou špatně označenou odpověď –2 body, za otázku bez odpovědi 0 bodů. Pokud podle těchto pravidel nasbíráte za úlohu záporný počet bodů, budete za ni hodnoceni 0 body.

**Způsob označování a korekce.** Zvolená odpověď se označuje úplným vyplněním příslušného kolečka. Pokud jste odpověď již označili a chcete se opravit, můžete svou volbu zrušit velkým křížkem přes vyplněné kolečko a vyplnit kolečko jiné. Zvolit již škrtnuté kolečko však nelze. Jinak označené odpovědi jsou považovány za neoznačené. V následujícím příkladu si všimněte, že poslední dva sloupčky mají stejnou hodnotu, rozdíl je pouze v korekcích.

**Příklad.** Jako příklad uvádíme počty bodů, které získáte pro různé zaškrtnání odpovědí v úloze „Výsledek úlohy  $1 + 1$  je“:

		Odpovědi		Odpovědi		Odpovědi		Odpovědi		
		Ano	Ne	Ano	Ne	Ano	Ne	Ano	Ne	
(a)	2	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	(+2)	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	(+2)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	(0)
(b)	3	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(+2)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	(0)	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(+2)
(c)	Méně než 12	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	(+2)	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(-2)	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(0)
(d)	Kladné číslo	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	(+2)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	(0)	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(-2)
(e)	1	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(+2)	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	(-2)	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	(+2)
<b>Bodů:</b>		<b>10</b>		<b>0</b>		<b>2</b>		<b>2</b>		

<sup>1</sup>Za dobře označenou odpověď se považuje taková, kde správná odpověď je „Ano“ a vy označíte pouze „Ano“, nebo správná odpověď je „Ne“ a vy označíte pouze „Ne“. Za špatnou odpověď se považuje taková, kde správná odpověď je „Ano“ a vy označíte pouze „Ne“, nebo správná odpověď je „Ne“ a vy označíte pouze „Ano“. Všechny ostatní možnosti se pokládají za otázku bez odpovědi.

V následujících úlohách určete, která tvrzení platí a která neplatí (Ano = platí, Ne = neplatí).

1. Uvažujme funkci  $f(x) = |x| + 2x - 1$ . Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

- (a) Funkce  $f$  je sudá.
- (b) Funkce  $f$  je lichá.
- (c) Funkce  $f$  je periodická.
- (d) Funkce  $f$  je rostoucí.
- (e) Funkce  $f$  je prostá.

2. V obdélníku  $ABCD$  znáte stranu  $a = |AB| = 8$  cm a úhlopříčku  $|AC| = 12$  cm. Střed strany  $b$  označíme  $S_b$  a střed strany  $c$  označíme  $S_c$ . Rozhodněte, zda platí:

- (a) Strana  $b$  má délku  $2\sqrt{15}$  cm.
- (b) Úsečka  $S_bS_c$  má délku 6 cm.
- (c) Úsečka  $AS_b$  má délku  $\sqrt{84}$  cm.
- (d) Trojúhelník  $AS_bS_c$  má plochu  $24$  cm<sup>2</sup>.
- (e) Trojúhelník  $AS_bS_c$  je rovnoramenný.

3. Necht'  $M_a$  je množina všech řešení rovnice

$$|x|^3 + ax^2 = 0$$

kde  $a$  je reálné číslo, v oboru reálných čísel. Rozhodněte, zda platí:

- (a) Existuje  $a$  reálné tak, že  $M_a$  je prázdná.
- (b) Existuje  $a$  reálné tak, že  $M_a$  je jednoprvková.
- (c) Existuje  $a$  reálné tak, že  $M_a$  je dvouprvková.
- (d) Existuje  $a$  reálné tak, že  $M_a$  je tříprvková.
- (e) Existuje  $a$  reálné tak, že  $M_a$  má více než tři prvky.

4. Uvažujme následující výroky o množině přirozených čísel  $M$

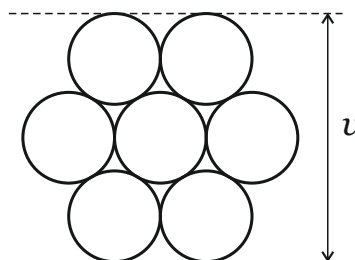
- (A)  $M$  neobsahuje žádné liché číslo.
- (B)  $M$  obsahuje všechna přirozená sudá čísla.
- (C)  $M$  obsahuje všechna prvočísla.
- (D)  $M$  obsahuje alespoň jedno liché číslo.

Která z následujících tvrzení jsou pravdivá pro libovolnou  $M$ ?

- (a) Pokud platí (A), pak platí (B).
- (b) Pokud platí (C), pak platí (D).
- (c) Pokud platí (B), pak neplatí (C).
- (d) Platí (A) nebo (D).
- (e) Neplatí (B) nebo neplatí (C).

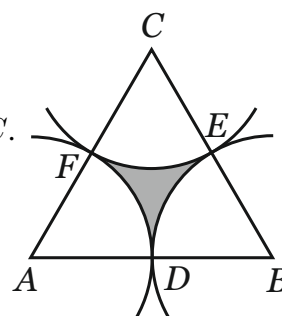
5. Sedm stejně velkých kružnic s poloměrem  $r = 1$  cm je umístěno tak, jak ukazuje obrázek (sousedící kružnice se dotýkají). Výšku celého útvaru označíme symbolem  $v$  (viz obrázek). Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

- (a)  $v > 5$  cm
- (b)  $v = 3\sqrt{3}$  cm
- (c)  $v = (2 + \pi)$  cm
- (d)  $v = (1 + 3\sqrt{2})$  cm
- (e)  $v = (2 + 2\sqrt{3})$  cm



6. Rovnostranný trojúhelník  $ABC$  má strany délky 10 cm. Středy jeho stran  $AB, BC, CA$  označíme po řadě  $D, E, F$ . Sestrojíme tři kružnice se středy v bodech  $A, B, C$  a s poloměrem 5 cm. Obsah plochy, kterou v trojúhelníku vymezují kruhové oblouky  $DE, EF, FD$ , označíme  $P$ . Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

- (a) Plocha  $P$  je menší než  $6 \text{ cm}^2$ .
- (b) Plocha  $P$  je menší než  $10 \text{ cm}^2$ .
- (c) Plocha  $P$  je menší než  $16 \text{ cm}^2$ .
- (d) Plocha  $P$  je přesně desetkrát menší než plocha trojúhelníka  $ABC$ .
- (e) Ze zadaných údajů nelze hodnotu  $P$  jednoznačně určit.



7. Spirála se skládá z polokružnic. Poloměr první polokružnice je 100 cm. Poloměr každé další polokružnice je o 20 % menší než poloměr polokružnice předcházející. Rozhodněte, zda platí:

- (a) Poloměr 3. polokružnice je 60 cm.
- (b) Součet délky 2. a 4. polokružnice je  $\frac{656\pi}{5}$  cm.
- (c) Podíl délky 5. a 3. polokružnice je 0,64.
- (d) Rozdíl délky 1. a 3. polokružnice je menší než 100 cm.
- (e) Celková délka spirály je větší než 1500 cm.

8. Označme  $X$  množinu šesticiferných čísel, v nichž se každá z cifer 1, 2, 3, 4, 5 a 6 objeví právě jednou. Necht'  $Y$  a  $Z$  jsou podmnožiny množiny  $X$ . Množina  $Y$  je množina čísel, jejichž sudé cifry jsou seřazeny od nejmenší po největší. Množina  $Z$  je množina čísel, jejichž první tři cifry jsou sudé. Která tvrzení jsou pravdivá?

- (a) Množina  $Y$  má více prvků než množina  $Z$ .
- (b) V průniku  $Y$  a  $Z$  leží právě jeden prvek.
- (c) Množina  $X$  obsahuje dvacetkrát více prvků než množina  $Z$ .
- (d) Množina  $Y$  obsahuje nejvýše 32 prvků.
- (e) Počty prvků v množinách  $Y$  a  $Z$  jsou dělitelné pěti.

9. Uvažujme všechna přirozená čísla, jejichž druhým největším dělitelem je číslo 49. (Dělitelem čísla  $n$  rozumíme přirozené číslo, které dělí  $n$  beze zbytku. Čísla 1 a  $n$  jsou též děliteli.) Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

- (a) Existuje jediné takové číslo.
- (b) Počet takových čísel je sudý.
- (c) Počet takových čísel je menší než 5.
- (d) Počet takových čísel je menší než 10.
- (e) Existuje nekonečně mnoho takových čísel.

10. Necht'  $M$  je množina všech řešení rovnice

$$e^{2\ln(\operatorname{tg} x)} = e^{-2\ln(\cos x)} - 1$$

v oboru reálných čísel. ( $\ln$  je přirozený logaritmus.) Rozhodněte, zda platí:

- (a) Pokud  $x \in M$ , pak  $-x \in M$ .
- (b) Pokud  $x \in M$ , pak  $(x + \pi) \in M$ .
- (c) Pokud  $x \in M$ , pak  $(x + 2\pi) \in M$ .
- (d) Pokud  $x \in M$ , pak  $2x \in M$ .
- (e) Množina  $M$  obsahuje neprázdný otevřený interval.

## **Řešení úloh**

1. Správné odpovědi: NNNA
2. Správné odpovědi: NAANN
3. Správné odpovědi: NANAN
4. Správné odpovědi: NANAN
5. Správné odpovědi: ANNNA
6. Správné odpovědi: AAANN
7. Správné odpovědi: NAANA
8. Správné odpovědi: ANANN
9. Správné odpovědi: NAAAN
10. Správné odpovědi: NNANA