**Přijímací zkouška na navazující magisterské studium - 2019**
**Studijní program Fyzika - všechny obory kromě Učitelství fyziky-matematiky pro střední školy, Varianta A**

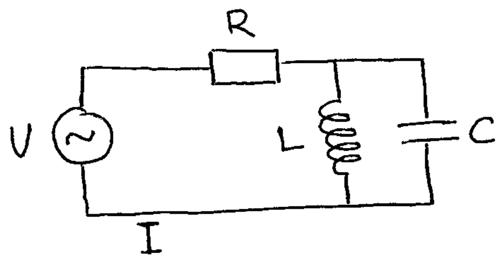
**Příklad 1 (25 bodů)**

Přehrada o tvaru obdélníku má šířku $s$ a výšku $v$ a vytváří nádrž zcela zaplněnou vodou. Počátek souřadné soustavy zvolte na úrovni hladiny vody tak, aby hladina byla rovnoběžná s osou $x$ a určete:

a) Velikost celkové síly $F$, jíž působí na přehradu vodní tlak.
b) Velikost celkového momentu tlakových sil vzhledem k hladině, tj. přímce $y$ = 0.
c) S použitím výsledků a) a b) nalezněte v jaké hloubce $h$ je působiště celkové síly $F$.

**Příklad 2 (25 bodů)**

Elektrický obvod (viz obrázek) se skládá z odporu o velikosti $R$, cívky o indukčnosti $L$ a kondenzátoru o kapacitě $C$. Obvod je napájen zdrojem střídavého napětí $U$ o amplitudě $U_0$ a frekvenci ω, jehož vnitřní odpor je zanedbatelný. Určete:




a) Kapacitanci kondenzátoru $X_C$ a induktanci cívky $X_L$.
b) Celkovou komplexní impedanci obvodu $Z$ ve tvaru a + $i$b.
c) Amplitudu proudu $I_0$ tekoucího odporem $R$.
d) Fázový posun proudu $I$ tekoucího odporem $R$ vůči napětí $U$.
e) Průběh (reálného) proudu $I = I(t)$, tekoucího odporem $R$.
f) Průměrný výkon (časovou střední hodnotu) $\langle P \rangle$ dodávaný zdrojem napětí do obvodu.

**Příklad 3 (25 bodů)**

Huygensův okulár se skládá ze dvou tenkých, ploskovypuklých čoček. Poloměr křivosti vypuklé strany u první čočky je $|R_1|$ = 1 cm, u druhé čočky $|R_2|$ = 3 cm. Čočky jsou vyrobeny ze skla s indexem lomu $n$ = 1,5 a jsou od sebe vzdáleny $v$ = 4 cm.

a) Vypočtěte ohniskové vzdálenosti obou čoček $f_1', f_2'$.
b) Určete polohu obrazu (po průchodu oběma čočkami) vzhledem ke druhé čočce, je-li předmět umístěn 10 cm před první čočkou.
c) Určete výslednou ohniskovou vzdálenost $f_{ok}'$ okuláru.
d) Stanovte úhlové zvětšení $M_{\mathrm{ok}}$ okuláru jako lupy (při akomodaci oka na nekonečno).
e) Z Huygensova okuláru a objektivu s ohniskovou vzdáleností $f_{obj}'$ = 0,5 cm vytvoříme mikroskop. Optický interval (vzdálenost obrazového ohniska objektivu od předmětového ohniska okuláru) je Δ = 20 cm. Spočtěte celkové zvětšení $M$ mikroskopu.

**Příklad 4 (25 bodů)**

Pro excitaci elektronu ze základního kvantového stavu atomu vodíku ($n$=1) do prvního excitovaného stavu ($m$=2) je možno použít dopadu jiného elektronu urychleného na vhodnou rychlost.

a) Stanovte energii $E$ elektronu potřebného k takové excitaci a velikost elektrického napětí $U$, kterým je potřeba dopadající elektron k získání takové energie urychlit.
b) Určete vlnovou délku $\lambda_e$ a rychlost $v_e$ dopadajícího elektronu těsně před dopadem a stejně tak i fotonu ($\lambda_\gamma$, $v_\gamma$), který bude vyzářen při následné deexcitaci elektronu zpět do základního stavu.
c) Rozhodněte, která z částic {foton, elektron, neutron} o této energii $E$ bude nejvhodnější k difrakčnímu experimentu pro studium krystalové mříže pevných látek?

*(Povolená nápověda: 1Ry = 13,6 eV; $m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}$kg (hmotnost elektronu); $m_n = 1{,}6\cdot10^{-27}$kg (hmotnost neutronu) Číselná vyjádření stačí vhodně zaokrouhlit.)*

**Příklad 1**

Přehrada o tvaru obdélníku má šířku *s* a výšku *v* a vytváří nádrž zcela zaplněnou vodou. Počátek souřadné soustavy zvolte na úrovni hladiny vody tak, aby hladina byla rovnoběžná s osou *x* a určete:

a) Velikost celkové síly *F*, jíž působí na přehradu vodní tlak.

b) Velikost celkového momentu tlakových sil vzhledem k hladině, tj. přímce $y = 0$.

c) S použitím výsledků a) a b) nalezněte v jaké hloubce *h* je působiště celkové síly *F*.

**Řešení:**

a) V hloubce *x* pod hladinou působí hydrostatický tlak

$p = \rho g y$ (2 body)

kde $\rho$ je hustota vody.

Z definice tlaku

$p = \frac{F}{S}$

kde *S* je plocha na kterou působí síla *F* získáme předpis pro sílu

$F = pS$ (2 body)

Vhledem k tomu, že hydrostatický tlak má jinou velikost napříč hloubkou celé přehrady, musíme vztah pro sílu integrovat od hladiny po maximální hloubku. Tedy

$F = s\int_0^v \rho g y \, dy = \frac{1}{2}\rho g s v^2$ (7 bodů)

b) Vztah mezi sílou a momentem síly je

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ (2 body)

V našem případě tedy musíme integrovat

$M = s\int_0^v \rho g y^2 \, dy = \frac{1}{3}\rho g s v^3$ (7 bodů)

c) Porovnáním velikosti síly a momentu sil s uvážením vztahu pro moment síly vidíme, že

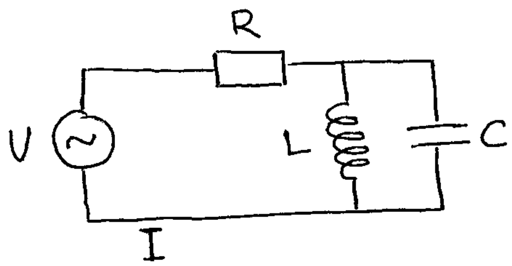
$M = Fh$

Tedy

$h = \frac{M}{F} = \frac{2}{3}v$ (5 bodů)

**Příklad 2**

Elektrický obvod (viz obrázek) se skládá z odporu o velikosti $R$, cívky o indukčnosti $L$ a kondenzátoru o kapacitě $C$. Obvod je napájen zdrojem střídavého napětí $U$ o amplitudě $U_0$ a frekvenci $\omega$, jehož vnitřní odpor je zanedbatelný. Určete:




a) Kapacitanci kondenzátoru $X_C$ a induktanci cívky $X_L$.
b) Celkovou komplexní impedanci obvodu $Z$ ve tvaru a + $i$b.
c) Amplitudu proudu $I_0$ tekoucího odporem $R$.
d) Fázový posun proudu $I$ tekoucího odporem $R$ vůči napětí $U$.
e) Průběh (reálného) proudu $I = I(t)$, tekoucího odporem $R$.
f) Průměrný výkon (časovou střední hodnotu) <$P$> dodávaný zdrojem napětí do obvodu.

**Řešení:**

a) kapacitance kondenzátoru:

$$X_C = \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C}$$ (2 body)

induktance cívky:

$$X_L = i\omega L$$ (2 body)

b) celková komplexní impedance obvodu $Z$ ve tvaru a + $i$b: (5 bodů)

$$Z = R + \frac{1}{\frac{1}{i\omega L} - \frac{1}{\frac{i}{\omega C}}} = R + \frac{1}{\frac{1}{i}\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)} = R + i\frac{1}{\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)} == R + i\frac{1}{\left(\frac{1-\omega^2 CL}{\omega L} - \right)} = R + i\frac{\omega L}{1-\omega^2 LC}$$

c) amplituda proudu $I_0$ tekoucího odporem $R$:

$$I_0 = \frac{U_0}{|Z|} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{1-\omega^2 LC}\right)^2}}$$ (4 body)

d) fázový posun proudu $I$ tekoucího odporem $R$ vůči napětí $U$:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}[Z]}{\mathrm{Re}[Z]}\right) = \arctan\left(\frac{\omega L}{R(1-\omega^2 LC)}\right)$$ (4 body)

e) proud tekoucí obvodem v místě odporu $R$: (5 bodů)

$$I = \mathrm{Re}\left[\frac{U}{Z}\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{U_0 \exp(i\omega t)}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{1-\omega^2 LC}\right)^2}\exp(i\varphi)}\right] == \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{1-\omega^2 LC}\right)^2}}\cos(\omega t - \varphi) = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

f) průměrný výkon (časová střední hodnota) <$P$> dodávaný zdrojem napětí do obvodu:

$$\langle P \rangle = I_{eff} U_{eff} \cos\varphi = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos(\varphi) = \frac{U_0^2}{2|Z|}\cos(\varphi) \quad atd.$$ (3 body)

**Příklad 3**

Huygensův okulár se skládá ze dvou tenkých, ploskovypuklých čoček. Poloměr křivosti vypuklé strany u první čočky je $|R_1| = 1$ cm, u druhé čočky $|R_2| = 3$ cm. Čočky jsou vyrobeny ze skla s indexem lomu $n = 1{,}5$ a jsou od sebe vzdáleny $v = 4$ cm.

a) Vypočtěte ohniskové vzdálenosti obou čoček $f_1'$, $f_2'$.

b) Určete polohu obrazu (po průchodu oběma čočkami) vzhledem ke druhé čočce, je-li předmět umístěn 10 cm před první čočkou.

c) Určete výslednou ohniskovou vzdálenost $f_{ok}'$ okuláru.

d) Stanovte úhlové zvětšení $M_{ok}$ okuláru jako lupy (při akomodaci oka na nekonečno).

e) Z Huygensova okuláru a objektivu s ohniskovou vzdáleností $f_{obj}' = 0{,}5$ cm vytvoříme mikroskop. Optický interval (vzdálenost obrazového ohniska objektivu od předmětového ohniska okuláru) je $\Delta = 20$ cm. Spočtěte celkové zvětšení $M$ mikroskopu.

**Řešení:**

a) $$\frac{1}{f'_{1,2}} = (n-1)\left(\frac{1}{R_{1,2}}\right)$$

Po dosazení $n = 1{,}5$, $R_1 = 1$ cm, $R_2 = 3$ cm (druhé povrchy čoček jsou rovinné, tj. s poloměrem křivosti $\infty$)

$f_1' = 2$ cm, $f_2' = 6$ cm (5 bodů)

b) Zobrazovací rovnice pro tenkou čočku je

$$\frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f'}$$

První čočka zobrazí předmět (dosadíme $a_1 = -10$ cm, $f_1' = 2$ cm) do vzdálenosti $a_1' = 2{,}5$ cm za první čočku.

Druhá čočka zobrazí obraz předmětu (dosadíme $a_2 = a_1' - v = -1{,}5$ cm, $f_2' = 6$ cm) do vzdálenosti $a_2' = -2$ cm, tj. 2 cm před druhou čočkou. (5 bodů)

c) Soustava dvou tenkých čoček má výslednou ohniskovou vzdálenost

$$f'_{ok} = -\frac{f'_1 f'_2}{v - f'_1 - f'_2}$$

Dosadíme $f_1' = 2$ cm, $f_1' = 6$ cm a $v = 4$ cm a získáme

$f_{ok}' = 3$ cm (5 bodů)

d) Úhlové zvětšení lupy při akomodaci oka na nekonečno je

$$M_{ok} = -\frac{L_0}{f'_{ok}}$$

Po dosazení $f_{ok}' = 3$ cm, konvenční zrakové vzdálenosti $L_0 = -25$ cm dostaneme

$M_{ok} = 25/3 = 8\,⅓$ (5 bodů)

e) Úhlové zvětšení mikroskopu je

$$M = -\frac{L_0}{f'_{ok}}\frac{\Delta}{f'_{obj}} = M_{ok}\frac{\Delta}{f'_{obj}}$$

Po dosazení $M_{ok} = 5$, $f_{obj}' = 0{,}5$ cm a optického intervalu $\Delta = 20$ cm získáme

$M = 333\,⅓$

(5 bodů)

**Pozn.**

Znaménka ve vzorcích a u dosazovaných hodnot se mohou lišit při užití jiné konvence.

**Příklad 4**
Pro excitaci elektronu ze základního kvantového stavu atomu vodíku ($n$=1) do prvního excitovaného stavu ($m$=2) je možno použít dopadu jiného elektronu urychleného na vhodnou rychlost.
a) Stanovte energii $E$ elektronu potřebného k takové excitaci a velikost elektrického napětí $U$, kterým je potřeba dopadající elektron k získání takové energie urychlit.
b) Určete vlnovou délku $\lambda_e$ a rychlost $v_e$ dopadajícího elektronu těsně před dopadem a stejně tak i fotonu ($\lambda_\gamma$, $v_\gamma$), který bude vyzářen při následné deexcitaci elektronu zpět do základního stavu.
c) Rozhodněte, která z částic {foton, elektron, neutron} o této energii $E$ bude nejvhodnější k difrakčnímu experimentu pro studium krystalové mříže pevných látek?
*(Povolená nápověda: 1Ry = 13,6 eV; $m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}$kg (hmotnost elektronu); $m_n = 1{,}6\cdot10^{-27}$kg (hmotnost neutronu) Číselná vyjádření stačí vhodně zaokrouhlit.)*

**Řešení:**
<u>*Známé a neznámé:*</u>
Rozdíl vodíkových kvantových stavů $\Delta E$: $m = 2 \rightarrow n = 1$
$\Delta E = E = ?$
$U = ?$
$\lambda_e$, $v_e$ = ?
$\lambda_\gamma$, $v_\gamma$ = ?
$\lambda_\gamma$, $\lambda_e$, $\lambda_n$ - difrakce na krystalu ... ?
1 Ry = 13,6 eV
$m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}$kg
$m_n = 1{,}6\cdot10^{-27}$kg
-----------------------------------------------
a) Dopadající elektron musí mít minimálně energii odpovídající energetickému rozdílu kvantových stavů (Bohrův model):

$\Delta E = -\text{Ry}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ (3 body)

(číselně $\Delta E = -13{,}6\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2}\right)$ eV = $\frac{3}{4}$ 13,6 eV = **10,2 eV**) (2 body)

Takto vyjádřená energie uvedená v jednotkách eV rovnou obsahuje velikost elektrického napětí nutného k urychlení elektronu $E = eU$ – tj. $U$ = **10,2 V** (1 bod)

b) Vlnová délka pohybující se <u>*částice*</u> s energií $E$ a hmotností $m$ je určena de-Broglieho vztahem:

$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2Em}}$ (3 body)

(Pro číselné určení je třeba vyjádřit $E$ v jednotkách SI - tj. převést z <u>eV</u> na <u>J</u>
znalost $1\text{eV} = 1{,}6\cdot10^{-19}$J (2 body)
tj. $10{,}2\text{eV} = 10{,}2\cdot1{,}6\cdot10^{-19}\text{ J} \approx 1{,}6\cdot10^{-18}\text{ J}$ )

(číselně tedy $\lambda_e = \frac{6{,}6\cdot10^{-34}}{\sqrt{2\cdot10{,}2\cdot1{,}6\cdot10^{-19}\cdot9{,}1\cdot10^{-31}}} = \frac{6{,}6\cdot10^{-34}}{\sqrt{3{,}2\cdot10^{-48}}} \approx \frac{6{,}6\cdot10^{-34}}{2\cdot10^{-24}} = \mathbf{3{,}3\cdot10^{-10}\ m}$

(tj. $\lambda_e$ = **3,3 Å**) (2 body)

A její rychlost

$v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ (3 body)

(číselně $v_e = \sqrt{\frac{2E}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-18}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}}$ m.s$^{-1}$ = $\sqrt{\frac{1 \cdot 10^{13}}{3}}$ m.s$^{-1}$ = $\sqrt{\frac{1 \cdot 10^{14}}{30}}$ m.s$^{-1}$ $\approx \frac{1}{3} \cdot 10^{7}$ m.s$^{-1}$
$\approx \mathbf{1{,}6 \cdot 10^{6}}$ **m.s$^{-1}$** ) (2 body)

Pro nehmotný *foton* použijeme vztahu
$E = \frac{hc}{\lambda}$, odtud $\lambda = \frac{hc}{E}$
(číselně $\lambda_\gamma = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{1{,}6 \cdot 10^{-18}} = \frac{2 \cdot 10^{-25}}{1{,}6 \cdot 10^{-18}} \approx \mathbf{1{,}2 \cdot 10^{-7}}$ **m = 120 nm** ) (2 body)
(pro rychlost fotonu platí $v_\gamma \equiv c = \mathbf{3 \cdot 10^{8}}$ **m · s$^{-1}$**) (1 bod)

c) Pro účinné použití vlny pro difrakci na krystalové míříž je třeba, aby vlnová délka byla srovnatelná s rozměrem studovaného objektu, resp. mřížkové konstanty, která je v pevných látkách typicky **~$\mathbf{10^{-10}}$ m** (jednotky Å). (1 bod)
Z předchozí podúlohy víme, že

- $\lambda_e = \mathbf{3{,}3 \cdot 10^{-10}}$**m**

a

- $\lambda_\gamma = \mathbf{1{,}2 \cdot 10^{-7}}$**m**

zbývá tedy určit již jen $\lambda_n = \frac{h}{\sqrt{2Em_n}}$
(číselně $\lambda_n = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-18} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-27}}} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{50 \cdot 10^{-46}}} \approx \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34}}{7 \cdot 10^{-23}} = \mathbf{1{,}0 \cdot 10^{-11}}$ **m** ) (2 body)

- $\lambda_n = \mathbf{1{,}0 \cdot 10^{-11}}$**m**

Tedy při energii 10,2 eV je pro difrakční experiment na krystalové mříži nejvhodnější **elektronový** svazek. (1 bod)