Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2019

Studijní program: Matematika
Studijní obory: MA, MMIT, MMFT, MSTR, MNVM, MPMSE

Varianta A

Řešení úloh pečlivě odůvodněte. Věnujte pozornost ověření předpokladů použitých matematických vět.

Úloha 1 (25 bodů)
Nechť $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ jsou posloupnosti splňující:

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \log(n+k),$$

$$y_n = \log\left(\sum_{k=1}^{n} k^k\right).$$

Spočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$.
Vysvětlete své řešení.

Úloha 2 (25 bodů)
Ať $M = \{(x,y) \colon x^2 + y^2 \le 1, y \ge (x-1)^2\}$. Spočtěte

$$\int_M (x+2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Úloha 3 (25 bodů)
Vyšetřete průběh funkce f (definiční obor, sudost, lichost, periodičnost, limity v krajních bodech, spojitost, derivace (včetně jednostranných), monotonii, lokální a globální extrémy, obor hodnot, konvexitu, konkavitu, inflexní body, asymptoty, obrázek) pro

$$f(x) = \log(|x^2 - 1| + 2).$$

Úloha 4 (25 bodů)
V prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem uvažujme vektory

$$\mathbf{v}_1 = (2,1,0,-1), \quad \mathbf{v}_2 = (-3,-1,1,5), \quad \mathbf{v}_3 = (0,4,2,10).$$

(i) Najděte ortonormální bázi lineárního obalu vektorů $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$.
(ii) Určete ortogonální projekci vektoru $\mathbf{v}_3$ na lineární obal vektorů $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$.
(iii) Určete ortogonální projekci vektoru $2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2$ na lineární obal vektorů $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$.

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2019

Studijní program: Matematika
Studijní obory: MA, MMIT, MMFT, MSTR, MNVM, MPMSE

Varianta A – **Řešení**

Úloha 1 (25 bodů)
Nechť

$$
\begin{aligned}
a_n &= n \log n, \\
b_n &= n \log(2n), \\
c_n &= \log(n^n), \\
d_n &= \log(n^{n+1}).
\end{aligned}
$$

Pak

$$
\begin{aligned}
0 \le a_n \le x_n \le b_n, \\
0 \le c_n \le y_n \le d_n.
\end{aligned}
$$

Tedy

$$
\begin{aligned}
\frac{a_n}{d_n} \le \frac{x_n}{y_n} \le \frac{b_n}{c_n}, \\
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{d_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1, \\
\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log 2 + \log n}{\log n} = 1.
\end{aligned}
$$

Použijeme větu o dvou strážnících a obdržíme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$.

Úloha 2 (25 bodů)
Snadno zjistíme, že pro $(x, y) \in M$ je $x \in [0, 1]$ a $y \le \sqrt{1 - x^2}$. Z Fubiniovy věty dostáváme

$$
\begin{aligned}
\int_M (x + 2y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \left(\int_{(x-1)^2}^{\sqrt{1-x^2}} (x + 2y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left[xy + y^2 \right]_{y=(x-1)^2}^{y=\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(x\sqrt{1 - x^2} + (1 - x^2) - x(x-1)^2 - (x-1)^4 \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(x\sqrt{1 - x^2} - x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 3x \right) \mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{1}{3}(1 - x^2)^{3/2} - \frac{1}{5}x^5 + \frac{3}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{3}{4} - \frac{5}{3} + \frac{3}{2} = \frac{43}{60}.
\end{aligned}
$$

Úloha 3 (25 bodů)
$D_f = \mathbb{R}$, spojitá na D_f, f je sudá, není lichá ani periodická

$$
\lim_{x\to\pm\infty} = +\infty
$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x^2+1}, & x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ \frac{-2x}{3-x^2}, & x \in (-1, 1) \end{cases}$$

$f'_\pm(-1) = \pm 1$, $f'_\pm(1) = \pm 1$,

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}, & x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ \frac{-6-2x^2}{(3-x^2)^2}, & x \in (-1, 1) \end{cases}$$

f roste na $[-1, 0]$ a $[1, \infty)$, klesá na $(-\infty, -1]$ a $[0, 1]$. V bodě 0 má lokální maximum, v bodech ± 1 má lokální i globální minimum, globální maximum neexistuje. Dále f je konkávní na $(-\infty, -1]$, $[-1, 1]$ a $[1, \infty)$, nemá inflexní body, asymptoty v $\pm\infty$ neexistují, $H_f = [\log(2), \infty)$.

Úloha 4 (25 bodů)

Použijeme Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces s průběžným normováním.

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &= \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, 0, -1) \\
\mathbf{w}'_2 &= \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 = (-3, -1, 1, 5) + \frac{12}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, 0, -1) \\
&= (-3, -1, 1, 5) + (4, 2, 0, -2) = (1, 1, 1, 3) \\
\mathbf{w}_2 &= \frac{\mathbf{w}'_2}{\|\mathbf{w}'_2\|} = \frac{1}{\sqrt{12}}(1, 1, 1, 3) \\
\mathbf{w}'_3 &= \mathbf{v}_3 - ((\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2) \\
&= (0, 4, 2, 10) - \left(-\frac{6}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, 0, -1) + \frac{36}{\sqrt{12}}\frac{1}{\sqrt{12}}(1, 1, 1, 3)\right) \\
&= (0, 4, 2, 10) - ((-2, -1, 0, 1) + (3, 3, 3, 9)) \\
&= (0, 4, 2, 10) - (1, 2, 3, 10) = (-1, 2, -1, 0) \\
\mathbf{w}_3 &= \frac{\mathbf{w}'_3}{\|\mathbf{w}'_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1, 0)
\end{aligned}$$

(i) Jedna z ortonormálních bází prostoru generovaného vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ je

$$(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, 0, -1),\ \frac{1}{\sqrt{12}}(1, 1, 1, 3),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1, 0)\right) .$$

(ii) Podprostor generovaný vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ je roven podprostoru generovanému vektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$. Ortogonální projekci vektoru $\mathbf{v}_3$ na tento podprostor odečítáme od vektoru $\mathbf{v}_3$ při výpočtu vektoru $\mathbf{w}'_3$, je rovná $(1, 2, 3, 10)$.

(iii) Daný vektor v lineárním obalu vektorů $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ leží, jeho ortogonální projekce je tedy rovná $2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 = (-5, -1, 3, 13)$.

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2019

Studijní program: Matematika
Studijní obory: MA, MMIT, MMFT, MSTR, MNVM, MPMSE

Varianta B

Řešení úloh pečlivě odůvodněte. Věnujte pozornost ověření předpokladů použitých matematických vět.

Úloha 1 (25 bodů)

(a) Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{2n^2-3}{2n^2}}.$$

(b) Spočtěte

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos^3(x) - 1 + \frac{3}{2}x^2}{x^4}.$$

(c) Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left(\sqrt[3]{\frac{2n^2-3}{2n^2}} - \cos\frac{1}{n} \right) n^4 \right],$$

kde $[x]$ značí dolní celou část čísla x.

Úloha 2 (25 bodů)

Spočtěte

$$\int e^{3x} \arctan(e^x + 1)\,\mathrm{d}x.$$

Úloha 3 (25 bodů)

Ať $f(0,0) = 0$ a pro $(x,y) \neq (0,0)$

$$f(x,y) = \frac{\sin x \sin^2 y}{x^2 + y^2}.$$

a) Určete definiční obor funkce f.
b) Je funkce f spojitá na svém definičním oboru?
c) Má funkce f totální diferenciál v bodě $(0,0)$?

Úloha 4 (25 bodů)

Uvažujme následující reálnou matici A_p, kde p je reálný parametr.

$$A_p = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & p-1 \end{pmatrix}.$$

V závislosti na p

(i) určete hodnost matice A_p,
(ii) najděte všechna řešení homogenní soustavy rovnic $A_p\mathbf{x} = \mathbf{o}$ a
(iii) spočítejte determinant matice A_p.

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2019

Studijní program: Matematika
Studijní obory: MA, MMIT, MMFT, MSTR, MNVM, MPMSE

Varianta B – **Řešení**

Úloha 1 (25 bodů)

(a) Použijeme větu o záměně odmocniny a limity

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{2n^2-3}{2n^2}}=\sqrt[3]{\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3}{2n^2}}=1.$$

(b) Spočteme Taylorův rozvoj funkce $\cos^3$ v bodě 0:

$$\cos^3(x)=1-\frac{3}{2}x^2+\frac{7}{8}x^4+o(x^4),\quad x\to 0.$$

Tedy

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^3(x)-1+\frac{3}{2}x^2}{x^4}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{7}{8}+\frac{o(x^4)}{x^4}\right)=\frac{7}{8}.$$

(c) Použijeme Heineovu větu pro $x_n=\frac{1}{n}\to 0$, $\frac{1}{n}\neq 0$ pro $n\in\mathbb{N}$ a obdržíme

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{\frac{2n^2-3}{2n^2}}-\cos\frac{1}{n}\right)n^4=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-\frac{3}{2}x^2}-\cos(x)}{x^4},$$

pokud limita vpravo existuje. Z (b) vyplývá, že

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-\frac{3}{2}x^2}-\cos(x)}{x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{3}{2}x^2-\cos^3(x)}{x^4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{1-\frac{3}{2}x^2}\right)^2+\cos(x)\sqrt[3]{1-\frac{3}{2}x^2}+\cos^2(x)}=$$

$$=-\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{3}=-\frac{7}{24}.$$

Tedy existuje $n_0\in\mathbb{N}$ takové, že pro každé $n\geq n_0$ platí

$$-1\leq\left(\sqrt[3]{\frac{2n^2-3}{2n^2}}-\cos\frac{1}{n}\right)n^4<0.$$

Pak ovšem

$$\left[\left(\sqrt[3]{\frac{2n^2-3}{2n^2}}-\cos\frac{1}{n}\right)n^4\right]=-1$$

pro všechna $n\geq n_0$ a hledaná limita se tedy rovná -1.

Úloha 2 (25 bodů)

Použijeme substituci $t = e^x$ a dále integraci per partes, čímž obdržíme

$$\begin{aligned}\int t^2 \arctan(t+1)\,\mathrm{d}t &= \frac{t^3}{3}\arctan(t+1) - \frac{1}{3}\int \frac{t^3}{(t+1)^2+1}\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{t^3}{3}\arctan(t+1) - \frac{1}{3}\int (t-2)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{3}\int \frac{2t+2}{t^2+2t+2}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{3}\int \frac{2}{(t+1)^2+1}\,\mathrm{d}t \\ &\overset{C}{=} \frac{t^3}{3}\arctan(t+1) - \frac{t^2}{6} + \frac{2}{3}t - \frac{1}{3}\log(t^2+2t+2) - \frac{2}{3}\arctan(t+1), \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Tedy původní integrál je roven (až na konstantu)

$$\frac{e^{3x}}{3}\arctan(e^x+1) - \frac{e^{2x}}{6} + \frac{2e^x}{3} - \frac{1}{3}\log(e^{2x}+2e^x+2) - \frac{2}{3}\arctan(e^x+1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Úloha 3 (25 bodů)

a) $D_f = \mathbb{R}^2$, protože $x^2 + y^2 = 0$, právě když $(x, y) = (0, 0)$.

b) Zřejmě f je spojitá na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, protože jde o podíl spojitých funkcí. Spojitost v bodě $(0, 0)$ ověříme spočítáním limity. K tomu využijeme nerovnost $|\sin x| \le |x| \le \sqrt{x^2+y^2}$, což nám dává

$$\frac{|\sin x \sin^2 y|}{x^2+y^2} \le \frac{|x|y^2}{x^2+y^2} \le |x| \le \sqrt{x^2+y^2}.$$

Z věty o dvou strážnících tedy plyne

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Jelikož navíc $f(0,0) = 0$, funkce f je spojitá v bodě $(0, 0)$. Celkem tedy f je spojitá na D_f.

c) Funkce f je konstantní na obou souřadných osách, tedy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Pokud tedy totální diferenciál existuje, je to nulová lineární forma $L(h, k) = 0$. L je totálním diferenciálem právě když

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h, 0+k) - f(0,0) - L(h,k)}{||(h,k)||} = 0.$$

Snadno ovšem vidíme, že

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin h \sin^2 k}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

nemůže vyjít nula, protože například pro $k = h > 0$ dostáváme

$$\lim_{h\to 0+} \frac{\sin^3 h}{2^{\frac{3}{2}} h^3} = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \neq 0.$$

Totální diferenciál funkce f v bodě $(0, 0)$ tedy neexistuje.

Úloha 4 (25 bodů)

Gaussovou eliminací upravíme matici do řádkově odstupňovaného tvaru.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & p-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & p+1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & p-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & p+1 \end{pmatrix}$$

(i) Matice je v odstupňovaném tvaru pro každé p. Pro $p \neq -1$ má odstupňovaný tvar 4 nenulové řádky a hodnost matice A_p je proto 4, pro $p = -1$ má matice A_p hodnost 3.

(ii) Pro $p \neq -1$ je množina všech řešení $\{\mathbf{o}\}$. Pro $p = -1$ máme jednu volnou proměnnou, a to poslední. Bázi množiny všech řešení tvoří jeden vektor, který získáme libovolnou nenulovou volbou této proměnné a zpětnou substitucí. Množina všech řešení je $\mathrm{LO}\{(-13, -1, 4, 6)\}$.

(iii) Žádná z provedených úprav nemění determinant a determinant horní trojúhelníkové matice je součin prvků na diagonále. Determinant matice A_p je tedy $-6(p+1)$.